

А. С. Маслій

Український державний університет залізничного транспорту
майдан Фейербаха, 7, м. Харків, 61050, Україна
Тел.: +380974137970, E-mail: maslij@kart.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0554-8150>

В. А. Геврасьов

Український державний університет залізничного транспорту
майдан Фейербаха, 7, м. Харків, 61050, Україна
Тел.: +380932563660, E-mail: gevasov_phd@kart.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8910-5172>

Р. М. Антоненко

Український державний університет залізничного транспорту
майдан Фейербаха, 7, м. Харків, 61050, Україна
Тел.: +380632257218, E-mail: antonenko_phd@kart.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-9241-5857>

Я. В. Якубовський

Український державний університет залізничного транспорту
майдан Фейербаха, 7, м. Харків, 61050, Україна
Тел.: +380974460052, E-mail: lili@i.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-7833-6604>

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МАКРОДИНАМІКИ РЕЙКОВОГО РУХОМОГО СКЛАДУ З БАГАТОДВИГУННИМ ТЯГОВИМ ЕЛЕКТРОПРИВОДОМ

Стаття присвячена вирішенню актуальної науково-прикладної проблеми підвищення точності та достовірності математичного моделювання макродинаміки тягового рухомого складу. Головною метою дослідження є розробка узагальненої математичної моделі руху поїзда, яка здатна комплексно описувати нестационарні процеси в тяговому електроприводі та зоні фрикційного контакту «колесо-рейка» в режимах тяги і гальмування. В основі запропонованого рішення лежить інтегрований підхід до опису електромеханічних та фрикційних систем із застосуванням трирівневої архітектури моделювання: мікродинаміка на рівні окремої осі, сумація зусиль на рівні секції або візка та макродинаміка поїзда в цілому. В роботі обґрунтовано доцільність застосування оптимізованої одномасової розрахункової схеми механічної частини тягового електроприводу для задач оцінки енергоефективності, розрахунку гальмівних шляхів та загального руху ділянкою.

Вдосконалено комплексну систему диференціальних рівнянь, яка об'єднує підсистеми формування сили тяги, механічного та електричного гальмування,

© Маслій А. С., Геврасьов В. А., Антоненко Р. М., Якубовський Я. В., 2026

а також опору руху. Суттєво удосконалено математичний опис фрикційної взаємодії шляхом представлення коефіцієнта зчеплення як нелінійної функції одночасно від лінійної швидкості руху екіпажу та швидкості проковзування колісної пари. На основі цього побудовано просторові (3D) характеристики коефіцієнта тертя для різних типів локомотивів.

Розроблена модель дозволяє адекватно відтворювати нестационарні режими втрати зчеплення (боксування, юз) та перехід від тертя спокою до тертя ковзання в єдиному розрахунковому контурі. Універсальність математичного апарату забезпечує його легке масштабування та адаптацію до маневрових, вантажних, пасажирських та високошвидкісних поїздів з розподіленою тягою, що створює надійне підґрунтя для оптимізації алгоритмів мікропроцесорних систем керування тягою і протиюзним захистом.

Ключові слова: математичне моделювання, багатодвигунний тяговий рухомий склад, тяговий електропривод, контакт «колесо-рейка», коефіцієнт зчеплення, швидкість проковзування.

Вступ. Оцінка експлуатаційних показників тягового рухомого складу вимагає детального моделювання руху поїзда на заданій ділянці колії. Використання точних математичних моделей та врахування реальних параметрів інфраструктури (профіль, план колії, стан поверхонь) дозволяють суттєво підвищити достовірність результатів досліджень. Важливою ланкою перевізного процесу є як маневрова та вивізна робота, так і магістральні вантажні та високошвидкісні пасажирські перевезення. Тому підвищення ефективності функціонування сучасних локомотивів та моторвагонного рухомого складу є актуальним завданням сучасної транспортної науки.

Постановка проблеми. Ефективність експлуатації сучасного тягового рухомого складу визначається складною взаємодією механічних, електромеханічних та фрикційних процесів, що відбуваються як у тяговому електроприводі, так і в зоні контакту «колесо-рейка». Особливу роль у формуванні тягових і гальмівних зусиль відіграють нестационарні явища, зокрема боксування та юз, які виникають унаслідок зміни умов зчеплення та перерозподілу навантаження між колісними парами.

Існуючі підходи до математичного моделювання руху поїзда, як правило, базуються на спрощених уявленнях про коефіцієнт зчеплення, подаючи його як функцію швидкості руху або задаючи емпірично. Такий підхід є прийнятним для ustalених режимів, однак не забезпечує адекватного опису перехідних процесів, у яких визначальним є взаємозв'язок між швидкістю руху та швидкістю проковзування.

Крім того, більшість моделей розглядає динаміку поїзда та процеси у тяговому електроприводі ізольовано, що обмежує можливість комплексного аналізу їх взаємного впливу. У зв'язку з цим виникає необхідність розробки узагальненої математичної моделі, здатної інтегрувати зазначені процеси в єдиному розрахунковому контурі з урахуванням нестационарної фрикційної взаємодії.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питанням моделювання динаміки руху поїзда та взаємодії рухомого складу з колією присвячено значну кількість праць. Вплив стану поверхні рейок на реалізацію сили тяги та моделювання профілю колії розглядалися у роботах В. П. Ткаченка та співавторів [1] та В. С. Ноженка [2]. Методику вдосконалення тягових розрахунків на базі переоцінки впливу фактичного профілю колії на рухомий склад запропоновано у дослідженні М. А. Барібіна та співавторів [3]. Дослідження процесів боксування та юзу, а також їх впливу

на перехідні процеси розгону та гальмування, ґрунтовно висвітлені Я. В. Болжеларським [4] та Д. В. Бобирем та співавторами [5]. У роботі [6] запропоновано підхід до моделювання динаміки взаємодії системи «рухомий склад – інфраструктура» на основі тривимірного методу скінченних елементів із урахуванням нелінійного контакту «колесо-рейка». Отримані результати дозволяють уточнити вплив контактних сил та деформацій на формування опору руху та динамічних навантажень у системі.

Значний внесок у математичне моделювання електромеханічних процесів тягового привода та мікропроцесорних систем векторного і прямого керування моментом тягових двигунів зробили Б. Г. Любарський, С. В. Гулак та співавтори [7, 8, 9]. Оцінка енергоефективності саме гібридних локомотивів та модернізованого моторвагонного рухомого складу з гібридними силовими установками розкрита у працях Е. Д. Тартаковського [10] та у сучасних дослідженнях колективу авторів під керівництвом Є. С. Рябова [11]. Питання фрикційної взаємодії та оцінки коефіцієнта зчеплення досліджувалися М. І. Петруковцем [12], С. С. Мямліним [13], а також іноземними вченими (Y. Zhang та інші) [14]. Окремої уваги заслуговує робота Г. С. Ігнатова та співавторів [15], у якій на базі експериментальних даних виведено емпіричну залежність для визначення коефіцієнта зчеплення електропоїздів, обладнаних асинхронним електроприводом та системами протибоксування. Математичні аспекти формування гальмівної сили та питання моделювання механічної частини тягового електроприводу (ТЕП) викладені Є. С. Рябовим [16] та колективом авторів під керівництвом W. Gan [17].

Незважаючи на значний обсяг досліджень, у багатьох математичних моделях макродинаміки поїзда нестационарними явищами в контакті «колесо-рейка» (зміна коефіцієнта тертя спокою на тертя ковзання) нехтують, або моделі створюються під вузькоспеціалізованими умовами без можливості адаптації до інших видів локомотивів.

Мета статті. Виділяючи невирішену раніше частину загальної проблеми, метою даної статті є розробка узагальненої деталізованої математичної моделі руху сучасного тягового рухомого складу різних типів (магістральних, маневрових, високошвидкісних та моторвагонних), яка комплексно описує динамічні процеси як безпосередньо у тяговому електроприводі (ТЕП), так і в зоні фрикційного контакту «колесо-рейка» у режимах тяги та гальмування.

Наукова новизна

1. Дістала подальший розвиток узагальнена математична модель руху поїзда, яка, на відміну від існуючих підходів, базується на наскрізній інтеграції нестационарних процесів у зоні фрикційного контакту (перехід від тертя спокою до ковзання) та динаміки тягового електропривода в єдиному розрахунковому контурі.

2. Удосконалено підхід до опису коефіцієнта зчеплення [14, 17], який подано як функцію не лише швидкості руху, а й швидкості проковзування, що дозволяє з достатньою точністю моделювати режими боксування та юзу в перехідних процесах.

3. Отримано інтегровану систему диференціальних рівнянь руху поїзда, яка об'єднує підсистеми:

- формування сили тяги,
- електричного та механічного гальмування,
- опору руху,
- що забезпечує можливість комплексного аналізу динаміки поїзда в різних експлуатаційних режимах.

4. Запропоновано ієрархічну модель із розділенням мікро– та макродинаміки.

РЕЙКОВИЙ РУХОМИЙ СКЛАД

5. Обґрунтовано доцільність застосування одномасової моделі механічної частини ТЕП для задач макродинаміки та енергоефективності, що дозволяє зменшити обчислювальну складність без суттєвої втрати точності.

6. Запропоновано підхід до моделювання фрикційної взаємодії у вигляді узагальненої залежності коефіцієнта тертя від швидкості руху та швидкості проковзування, що забезпечує врахування нестационарних режимів зчеплення та імітувати вплив зовнішніх збурень на макрорівні (зміна стану поверхні рейок, подача піску тощо) без деталізації просторового розподілу сил у колісній парі.

7. Отримані результати створюють основу для підвищення точності моделювання тягових процесів та оптимізації алгоритмів керування сучасним рухомих складом.

Силові фактори та загальна динаміка рухомого складу

Специфіка експлуатації залізничних тягових одиниць залежить від множини чинників, серед яких стан поверхонь тертя (колесо-рейка), ступінь зносу бандажів, а також профіль та план колії [1, 2]. Ці параметри безпосередньо впливають на динаміку та зумовлюють виникнення нестационарних процесів, таких як боксування (проковзування колісної пари відносно рейки в режимі тяги) та юз (блокування коліс під час гальмування) [4]. У багатьох математичних моделях ці явища ігноруються, що негативно позначається на точності відтворення перехідних процесів розгону та гальмування [5]. Тому створення деталізованого математичного апарату, який описує динаміку як у ТЕП, так і в зоні фрикційного контакту, є актуальним науково-технічним завданням.

Під час руху на поїзд діє комплекс внутрішніх та зовнішніх сил [5]. Згідно з законами механіки, внутрішні зусилля є взаємно врівноважені та не визначають її траєкторію. Як проілюстровано на рисунку 1, поступальний рух локомотива залежить виключно від зовнішніх факторів: дотичної сили тяги F_T , гальмівного зусилля B та загального опору руху поїзда W . Для високошвидкісних пасажирських поїздів сила W обов'язково включає домінуючу складову аеродинамічного опору.

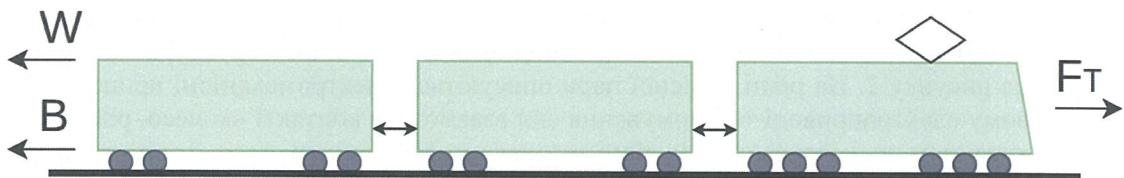


Рис. 1. Схема сил, що діють на поїзд у процесі його руху

Спираючись на рисунок 1 та принцип Даламбера, для поїзда як єдиної жорсткої маси базова система диференціальних рівнянь має класичний вигляд [7]:

РЕЙКОВИЙ РУХОМИЙ СКЛАД

$$\begin{cases} F_T - B - W = m_{\text{п}} \frac{dV_{\text{п}}}{dt} \\ F_T = f(F_{\text{дв}}, F_{\text{зч}}) \\ B = f(K, \varphi_K, F_{\text{зч}}) \\ W = f(V_{\text{п}}, k_w) \end{cases} \quad (1)$$

де F_T – сила тяги рухомого складу, Н;

B – гальмівна сила рухомого складу, Н;

W – сила опору рухомого складу, Н;

$m_{\text{п}}$ – маса поїзду, кг;

$V_{\text{п}}$ – швидкість поїзду, м/с;

$F_{\text{дв}}$ – сила тяги двигуна, Н;

$F_{\text{зч}}$ – сила зчеплення рухомого складу, Н;

K – сила притискування гальмівних колодок до колеса чи гальмівного диску (регулюється машиністом), Н;

φ_K – коефіцієнт тертя гальмівних колодок з колесом (диском);

k_w – коефіцієнт, що враховує вплив особливостей ділянки шляху, атмосферних умов на силу опору руху.

Аналіз цих рівнянь показує, що головні зусилля, які впливають на рухомий склад (РС) під час руху, є багатопараметричними функціями. Це вимагає поглибленого вивчення механізмів їх формування та взаємодії. Оскільки сучасні локомотиви та моторвагонний РС (МВРС) оснащуються ідентичними електроприводами на кожній колісній парі, раціонально дослідити динаміку одного ТЕП і розподіл зусиль у ньому. Згодом отриману математичну модель можна буде масштабувати на весь тяговий РС (ТРС) відповідно до кількості моторних осей.

МВРС розглядається як система з N елементів (секцій), кожна з яких може мати власний ТЕП або бути причіпною. Рівняння (1) прийме вид

$$\sum_{i=1}^N (F_{T,i} - B_i - W_i) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{dV}{dt} \quad (2)$$

Математична модель побудована за ієрархічним принципом і передбачає декомпозицію системи на три взаємопов'язані рівні. Ієрархічна структура представлена на рисунку 2. На рівні колісної пари описуються електромеханічні процеси в тяговому електроприводі та формування сил взаємодії в контакті «колесо–рейка» з урахуванням проковзування. На рівні тягового модуля виконується агрегування зусиль окремих колісних пар у межах візка або вагона з формуванням узагальненого тягового чи гальмівного зусилля. На рівні поїзда визначається поздовжній рух як єдиної механічної системи під дією сумарних зовнішніх сил.

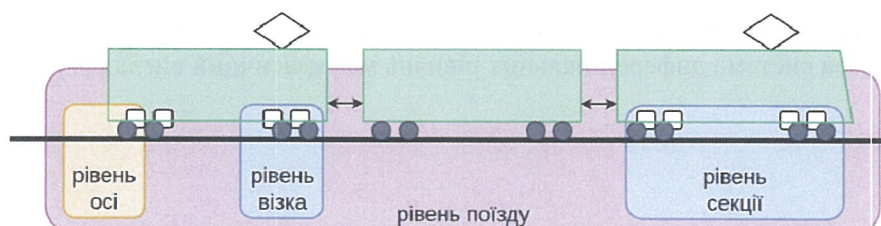


Рис. 2. Ієрархічна структура моделювання динаміки поїзда

РЕЙКОВИЙ РУХОМИЙ СКЛАД

Математичний опис процесу утворення сили тяги рухомого складу

Згідно з сучасними дослідженнями [1, 5] та нормативними правилами тягових розрахунків [18] механізм формування сили тяги відображено на рисунку 3.

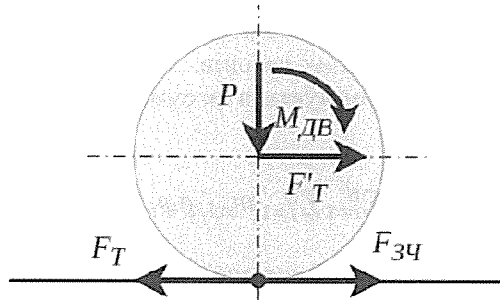


Рис. 3. Процес утворення сили тяги

На рисунку 3 схематично відображено процес трансформації електромагнітного моменту двигуна $M_{дв}$ у дотичну рушійну силу. Варто зауважити, що в загальному рівнянні (1) тягове зусилля представлено у вигляді узагальненої сили $F'_{дв}$, тоді як безпосередній аналітичний зв'язок між моментом двигуна та цією силою (з урахуванням передавального числа редуктора та радіуса колеса) детально розкривається далі у мікродинамічній моделі – рівняння (11). Відповідно до механіки процесу, проілюстрованої на рисунку 3 та системи рівнянь (1), загальне значення сили тяги F_T формується під впливом сили зчеплення $F_{зч}$ та сумарного зусилля тягових двигунів $F_{дв\Sigma}$. При цьому сила зчеплення $F_{зч}$ виступає фізичним обмежувачем максимальної тяги і безпосередньо залежить від коефіцієнта зчеплення $\varphi_{зч}$ [12].

Слід зазначити, що позначена на кінематичних схемах вертикальна сила P , яка притискає колесо до рейки та формує зону фрикційного контакту, у математичній моделі визначається через статичне та динамічне осьове навантаження m_0g .

У реальних умовах експлуатації навантаження на колісні пари розподіляється нерівномірно через динамічний перерозподіл ваги кузова в перехідних режимах (розгін, гальмування) та під час проходження кривих ділянок колії. Через це сила зчеплення для кожного колеса постійно змінюється і може суттєво відрізнитися [13]. Враховуючи ці фактори, для коректного моделювання макродинаміки загальну силу зчеплення недоцільно розглядати як статичну величину. Базовий розрахунок необхідно вести на рівні кожної окремої колісної пари за таким рівнянням:

$$F_{зчкп} = m_0g\varphi_{зч}(V_{кп}, v_{пр}) \quad (3)$$

де m_0 – осьове навантаження колісної пари, кг;

g – прискорення вільного падіння, m/c^2 ;

$\varphi_{зч}$ – коефіцієнт зчеплення колісної пари з рейкою;

$V_{кп}$ – лінійна швидкість обертання колісної пари, m/c ;

$v_{пр}$ – швидкість проковзування колеса, m/c .

Лінійна швидкість обертання колісної пари $V_{кп}$ пов'язана зі швидкістю поїзда та швидкістю проковзування наступним виразом

РЕЙКОВИЙ РУХОМИЙ СКЛАД

$$V_{\text{кп}} = V_{\text{п}} + v_{\text{пр}} \quad (4)$$

Водночас, сучасний МВРС характеризується розподіленою тягою, де тягові зусилля генеруються уздовж всього поїзда. У такому випадку розгляд системи як єдиної маси є некоректним через можливу різницю в осьових навантаженнях та стані контактної поверхні для різних вагонів. Тому для поїздів з розподіленою тягою глобальна сила зчеплення формується як сума локальних сил зчеплення по всіх N моторних (зчіпних) осях:

$$F_{\text{зч}\Sigma} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k m_{o,ij} g \varphi_{\text{зч},ij} (V_{\text{кп},ij}, v_{\text{пр},ij}) \quad (5)$$

де $m_{o,ij}$ – осьове навантаження від j -ї колісної пари i -го тягового модуля на рейки, кг;

$\varphi_{\text{зч},ij}$ – локальний коефіцієнт зчеплення для j -ї колісної пари з рейкою;

$V_{\text{кп},ij}$ – лінійна швидкість обертання j -ї колісної пари, м/с;

$v_{\text{пр},ij}$ – швидкість проковзування j -ї колісної пари, м/с;

k – кількість осей в межах одного i -го тягового модуля (візка або секції);

N – загальна кількість елементів (секцій, тягових модулів, вагонів) у складі поїзда.

Залежно від балансу зусиль $F_{\text{зч}\Sigma}$ та $F_{\text{дв}\Sigma}$, друге диференціальне рівняння із системи (1) для ідеалізованого локомотива трансформується таким чином:

$$F_{\text{т}} = \min(F_{\text{дв}\Sigma}, F_{\text{зч}\Sigma}) \quad (6)$$

Однак спрощена формула (6) не враховує явище локального зриву зчеплення. У реальних умовах експлуатації багатодвигунного ТРС кожна колісна пара може перейти в режим боксування незалежно від інших (через локальне забруднення рейки, розвантаження осі тощо). Сучасні мікропроцесорні системи керування тягою реагують на це індивідуальним зменшенням електромагнітного моменту лише на тій осі, що втратила зчеплення, без скидання загальної тяги всього поїзда.

Для адекватного моделювання таких алгоритмів загальна сила тяги $F_{\text{т}\Sigma}$ має обчислюватися не за глобальним мінімумом, а як сума реалізованих зусиль кожної окремої i -ї осі:

$$F_{\text{т}\Sigma} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \min(F_{\text{дв},ij}, F_{\text{зч},ij}) \quad (7)$$

Значення коефіцієнта зчеплення $\varphi_{\text{зч}}$ не є сталим і визначається станом рейок, лінійною швидкістю екіпажу, швидкістю проковзування, типом ТРС тощо. У класичних роботах з теорії локомотивної тяги [10] та правил тягових розрахунків [18] коефіцієнт зчеплення, як правило, задається у вигляді функції швидкості руху поїзда $V_{\text{п}}$. Такий підхід базується на узагальненні експериментальних даних і використовується для інженерних розрахунків усталених режимів, однак не враховує впливу швидкості проковзування та нестационарних процесів у контакті «колесо-рейка». Графічно такий узагальнений підхід проілюстровано на рисунку 4.

Слід зазначити, що наведені на рисунках 4 та 5 залежності побудовані на основі узагальнених емпіричних співвідношень, адаптованих для різних категорій тягового рухомого складу. При формуванні цих кривих бралися до уваги усереднені значення ключових експлуатаційно-технічних параметрів, зокрема номінальне осьове

РЕЙКОВИЙ РУХОМИЙ СКЛАД

навантаження, тип застосовуваних гальмівних систем та інші специфічні конструктивні особливості відповідних класів локомотивів і моторвагонних поїздів

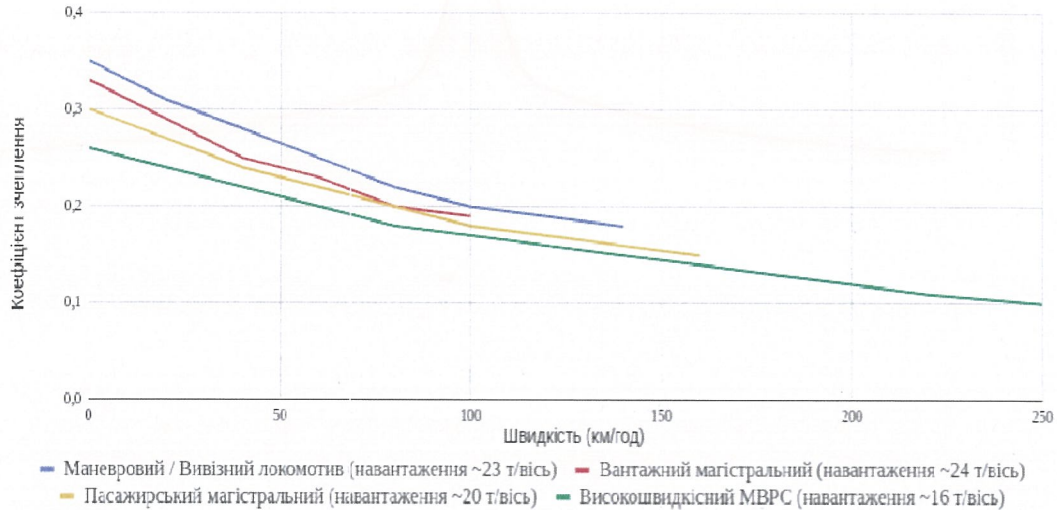


Рис. 4. Залежність коефіцієнта зчеплення $\varphi_{зч}$ від швидкості руху поїзда V_p

Проте така спрощена модель не дозволяє адекватно відтворити процеси ковзання у плямі контакту «колесо-рейка». У разі порушення зчеплення параметр $\varphi_{зч}$ (який виступає коефіцієнтом тертя спокою) трансформується у коефіцієнт тертя ковзання $\varphi_{тк}$, значення якого має динамічно коригуватися залежно від швидкості проковзування $v_{пр}$ [7].

Математично цей процес описується такою системою рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi_{зч,ij} = f(V_p, \varphi_{тк,ij}) \\ \varphi_{тк,ij} = \begin{cases} \varphi_{зч}(V_p), \text{ якщо } v_{пр,ij} = 0 \\ f(v_{пр,ij}), \text{ якщо } v_{пр,ij} \neq 0 \end{cases} \\ v_{пр,ij} = V_{кп,ij} - V_p \end{cases} \quad (8)$$

де $\varphi_{тк,ij}$ – коефіцієнт тертя ковзання j -ї колісної пари i -го тягового модуля.

Коефіцієнт тертя ковзання може варіюватися в широкому діапазоні від 0,05 до 0,8, що продиктовано фізичним станом контактних площин [10, 13]. Для імітації зовнішніх збурень (потрапляння мастила на рейки, подача піску) значення $\varphi_{зч}$ можна штучно змінювати в процесі моделювання. Типова залежність коефіцієнта тертя ковзання $\varphi_{тк}$ від швидкості проковзування $v_{пр}$ подана на рисунку 5.

Для створення максимально наочної та точної моделі фрикційної взаємодії необхідно об'єднати залежності з рисунків 4 та 5 у єдину тривимірну поверхню. Зображена на рисунку 6 залежність дозволяє комплексно і глибоко розкрити процеси, що протікають у контакті колеса та рейки.

РЕЙКОВИЙ РУХОМИЙ СКЛАД

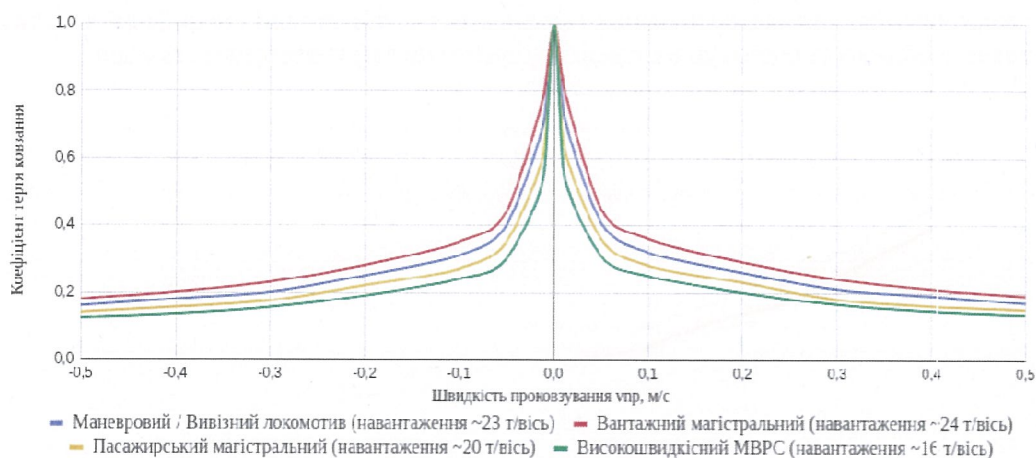


Рис. 5. Залежність коефіцієнта тертя ковзання $\phi_{тк}$ від швидкості проковзування $v_{пр}$

Обґрунтування та вибір розрахункової моделі механічної частини

Відповідно до виразу (6), якщо виконується умова $F_{зч\Sigma} > F_{дв\Sigma}$, то визначальними для генерації тягового зусилля стають електромагнітні та електромеханічні процеси безпосередньо всередині ТЕП локомотива.

Електропривод є складною системою, де окрім електричної частини та мікропроцесорної системи керування наявний механічний блок, що також вимагає прискіпливого математичного моделювання [16]. Від коректності опису механічної складової прямо залежить загальна адекватність руху ТЕП. У контексті дослідження поїзної роботи детальний аналіз розподілу сил у кінематичній схемі ТЕП є критично важливим, оскільки ця система містить нелінійні навантаження та працює в умовах специфічного контакту з рейкою [17].

Ступінь деталізації механіки ТЕП може бути різним: чим вища складність моделі, тим точнішими є результати, але водночас суттєво зростає час машинних обчислень.

Побудова математичної моделі механіки традиційно стартує з формування її кінематичної схеми. Залежно від конструкції РС, застосовуються різні види підвішування кузова та тягових двигунів (опорно-осьове чи опорно-рамне) з різноманітними передавальними механізмами. Надмірне врахування всіх цих конструктивних нюансів призводить до значного обтяження системи рівнянь, хоча їхній реальний вплив на глобальну динаміку локомотива є відносно малим.

Аналіз сучасного локомотивобудування доводить, що тягова передача з одноступінчастим редуктором є найпоширенішим та найбільш універсальним рішенням [5, 13]. Саме такий варіант механічної передачі енергії взято за основу для подальшого математичного опису. Кінематична схема механічної частини обраного ТЕП представлена на рисунку 7.

РЕЙКОВИЙ РУХОМИЙ СКЛАД

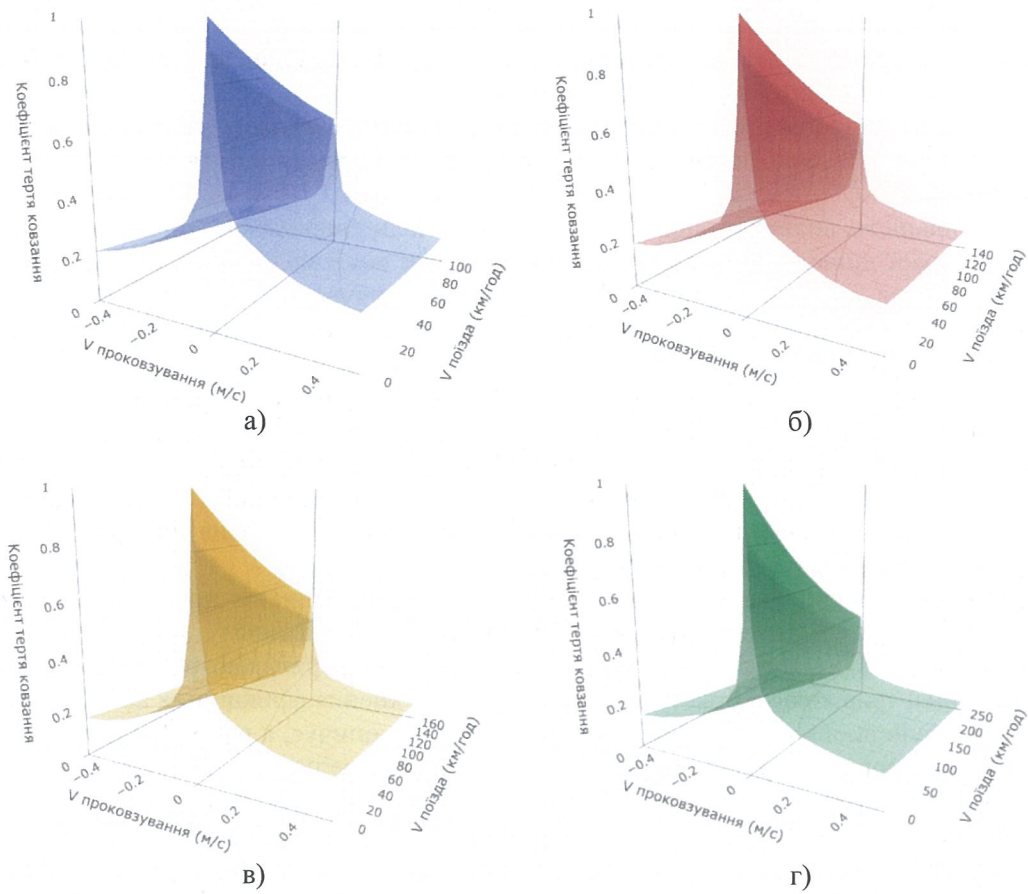


Рис. 6. Деталізоване представлення коефіцієнта зчеплення-ковзання:

- а) маневровий/вिवізний локомотив (навантаження 23 т/вісь)
- б) вантажний магістральний (навантаження 24 т/вісь)
- в) пасажирський магістральний (навантаження 20 т/вісь)
- г) високошвидкісний МВРС (навантаження 16 т/вісь)

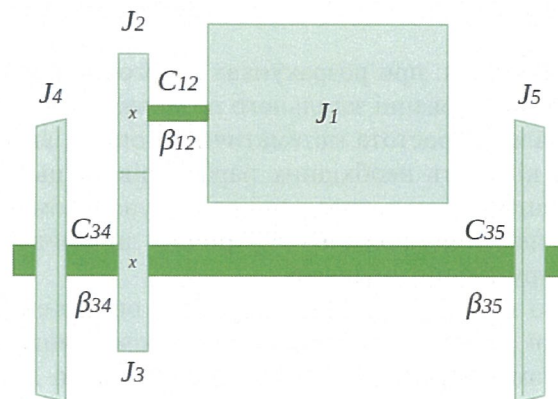


Рис. 7. Кінематична схема ТЕП

РЕЙКОВИЙ РУХОМИЙ СКЛАД

На базі кінематичної схеми формується розрахункова модель. Залежно від необхідного ступеня деталізації, розрахункова модель механічної частини може бути одномасовою, двомасовою або трьомасовою:

– Трьомасова модель розділяє інерційні маси ротора тягового двигуна, лівого та правого коліс колісної пари, що з'єднані пружними елементами (віссю та тяговою передачею).

Доцільність використання: Ця модель є безальтернативною при дослідженні просторової динаміки екіпажу в кривих ділянках колії малого радіуса, де ліве та праве колеса проходять різний шлях і виникає скручування колісної осі. Вона також необхідна для аналізу асиметричної втрати зчеплення (наприклад, при потрап-лянні мастила лише на одну рейку).

Недоліки: Екстремальна математична складність та потреба у великій кількості емпіричних даних (жорсткість осі, точна геометрія контакту тощо), що робить її використання для розрахунку загальної поїзної роботи недоцільним.

– Двомасова модель спрощує систему шляхом об'єднання мас лівого та правого коліс в одну еквівалентну масу колісної пари, яка відокремлена від маси ротора пружним зв'язком (тяговою передачею).

Доцільність використання: Цей підхід є критично важливим для локального моделювання систем керування специфічних видів рухомого складу. Для важкого магістрального вантажного руху, який характеризується тривалою роботою на межі зчеплення, зрив коліс у боксування провокує виникнення фрикційних автоколивань (stick-slip vibrations). У цей момент пружний вал накопичує, а потім різко вивільняє енергію, створюючи руйнівні ударні навантаження в редукторі. З іншого боку, для високошвидкісних пасажирських поїздів двомасова модель необхідна для оцінки динамічних ударів під час екстреного переходу з режиму тяги в режим інтенсивного електродинамічного гальмування або при високочастотному спрацюванні протизноної системи.

Недоліки: Хоча двомасова модель ідеально описує мікродинаміку та автоколивання в передачі, її застосування для симуляції тривалих перегонів перевантажує обчислювальні потужності, оскільки вимагає інтегрування високочастотних коливальних процесів, які глобально не впливають на загальний пройдений шлях чи втрати електроенергії поїзда.

– Одномасова модель застосовується у випадках, коли крутильні коливання у пружних зв'язках практично не впливають на загальне енергоспоживання та макродинаміку руху поїзда.

Доцільність використання: при розрахунках енергоефективності, побудові тягових характеристик та моделюванні загального поздовжнього руху поїзда ділянкою.

Переваги: максимальна простота математичного опису, висока швидкість обчислень та мінімальна кількість необхідних параметрів. У цьому випадку всі маси зводяться до еквівалентної маси ротора електродвигуна з моментом інерції J_1 [5, 7].

Недоліки: неможливість дослідження внутрішніх динамічних навантажень у механічній передачі та крутильних коливань.

Оскільки головною метою даного дослідження є оцінка енергоефективності локомотива та загальної динаміки поїзда, де домінуючий вплив мають елементи з найбільшими моментами інерції, розрахункову схему було доцільно оптимізувати до одномасової.

Спираючись на таку оптимізовану одномасову схему, було складено систему диференціальних рівнянь (9), яка розкриває механізм функціонування ТЕП під час

РЕЙКОВИЙ РУХОМИЙ СКЛАД

реалізації сили тяги. Для поїзда модель формується як сукупність незалежних тягових модулів.

$$\begin{cases} M_{дв,ij} - M_{окп,ij} = J_{пр,ij} \frac{d\omega_{кп,ij}}{dt} \\ M_{окп,ij} = f(M_{дв,ij}, F_{зчкп,ij}) \end{cases} \quad (9)$$

де $M_{дв,ij}$ – момент двигуна, Нм;

$M_{окп,ij}$ – момент опору прикладеного до колеса колісної пари, Нм;

$J_{пр,ij}$ – приведений момент інерції маси, кг м²;

$\omega_{кп,ij}$ – кутова швидкість колеса колісної пари, рад/с;

$F_{зчкп,ij}$ – сила зчеплення колеса з рейкою, Н.

Друге рівняння із комплексу (9), яке описує характер моменту опору першого та другого колеса, є складною багатовимірною функцією. Перехід колеса у стан боксування ініціюється виникненням надлишкового динамічного моменту в системі, що призводить до появи швидкості проковзування. Більш детально цей специфічний перехідний процес можна формалізувати наступним чином:

$$M_{окп,ij} = \begin{cases} M_{дв,ij}, \text{ якщо } F_{ркп,ij} < F_{зчкп,ij} \\ M_{зчкп,ij}, \text{ якщо } F_{ркп,ij} > F_{зчкп,ij} \end{cases} \quad (10)$$

де $F_{ркп,ij}$ – рушійна сила колеса, Н, що, з урахуванням передавального числа тягового редуктора $\mu_{тр}$, радіусу колеса $R_{к,ij}$ та ККД передавального механізму $\eta_{тр,ij}$ описується наступним виразом:

$$F_{ркп,ij} = \frac{\mu_{тр,ij} M_{дв,ij} \eta_{тр,ij}}{R_{к,ij}} \quad (11)$$

Запропонований підхід є універсальним і дозволяє врахувати технологічну асиметрію багатодвигунного ТРС (наприклад, різний ступінь зносу бандажів коліс на різних візках), так як рушійна сила розраховується індивідуально для кожного i -го ТЕП.

У сталих режимах руху (за відсутності боксування та юзу) $v_{пр} = 0$, що природним чином відпрацьовується логікою рівняння (10) без необхідності перебудови математичної моделі.

Враховуючи вищевикладене, для електропоїздів та багатосекційних локомотивів загальна математична модель формується як сукупність N незалежних тягових модулів, які описуються системою (9). Ці модулі є автономними на рівні мікродинаміки (швидкість проковзування $\omega_{пк}$ у кожного своя), але об'єднані між собою на макрорівні через спільну лінійну швидкість руху поїзда $V_{п}$.

Використовуючи математичну модель (9), було розроблено структурну схему функціонування ТЕП, яка відображена на рисунку 8.

РЕЙКОВИЙ РУХОМИЙ СКЛАД

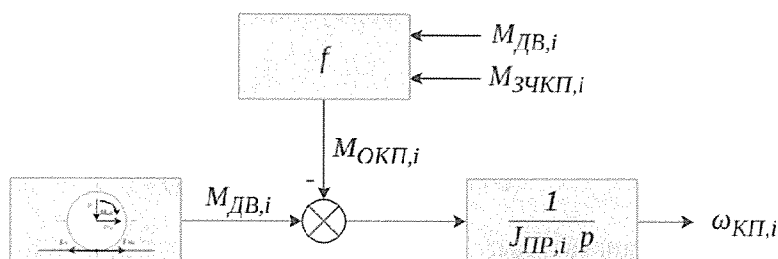


Рис. 8. Структурна схема роботи i -го тягового електроприводу в режимі тяги

Математичний опис процесу утворення гальмівної сили поїзда

Зниження швидкості локомотива забезпечується двома основними підходами: електричним (динамічним) та механічним (пневматичним) гальмуванням. Як правило, електродинамічне гальмування є ефективним на високих та середніх швидкостях [4, 17], тоді як повна зупинка потребує використання фрикційної механічної системи. Це обумовлює необхідність їх комплексного та спільного розгляду.

Під час роботи електричного гальма базова система диференціальних рівнянь (9) залишається незмінною, перехід з тягового в гальмівний режим відбувається лише за рахунок інверсії знака електромагнітного моменту двигуна.

Своєю чергою, робота механічного гальма вимагає глибокого фізичного аналізу. Взаємодія зусиль у системі «колесо-рейка» та фрикційних елементах під час цього процесу продемонстрована на рисунку 9.

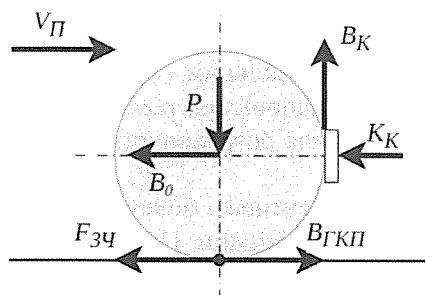


Рис. 9. Процес утворення гальмівної сили поїзда

Згідно з рисунком 9 та третім рівнянням у системі (2), ефективна гальмівна сила $V_{ГКП,ij}$ на одній колісній парі є функцією від сили натиснення колодок $K_{К,ij}$ та їхнього коефіцієнта тертя $\varphi_k(V_{КП,ij})$. Математично це виражається так:

$$V_{ГКП,ij} = 1000\varphi_k(V_{КП,ij})K_{К,ij} \quad (12)$$

де $K_{К,ij}$ – сила притискання гальмівних колодок до колеса (диска), Н.

Коефіцієнт тертя $\varphi_k(V_{КП,ij})$ є нелінійним параметром і розраховується згідно з [18] за емпіричними залежностями відповідно до матеріалу фрикційного елемента:

РЕЙКОВИЙ РУХОМИЙ СКЛАД

– для стандартних чавунних гальмівних колодок

$$\varphi_k(V_{\text{кп}}) = 0,6 \frac{1,6K+100}{8,0K+100} \cdot \frac{V+100}{5V+100} \quad (13)$$

– для композиційних гальмівних колодок

$$\varphi_k(V_{\text{кп}}) = \begin{cases} 0,44 \cdot \frac{0,1K+20}{0,4K+20} \cdot \frac{V+150}{2V+150}, & \text{якщо } V_{\text{п}} \leq 80 \text{ км/год} \\ 0,44 \cdot \frac{0,1K+1,2}{0,16K+1,2} \cdot \frac{V+67}{1,8V+67}, & \text{якщо } V_{\text{п}} > 80 \text{ км/год} \end{cases} \quad (14)$$

– для накладок дискового гальма

$$\varphi_k(V_{\text{кп}}) = 0,2458 \cdot \frac{0,1K+20}{0,4K+20} \cdot (e^{-0,0225V} + 1) \quad (15)$$

Загальне гальмівне зусилля жорстко лімітується наявним зчепленням коліс з рейками $F_{\text{зч}\Sigma}$. Якщо сумарне механічне зусилля $B_{\text{Г}\Sigma}$ або електромагнітна сила електричного гальма перевищує межу зчеплення, створюються передумови для блокування коліс (юз). Цей негативний експлуатаційний режим описується такими обмежувальними рівняннями:

– для механічного гальмування:

$$B = \begin{cases} F_{\text{зч}\Sigma}, & \text{якщо } F_{\text{зч}\Sigma} < B_{\text{Г}\Sigma} \\ B_{\text{Г}\Sigma}, & \text{якщо } F_{\text{зч}\Sigma} > B_{\text{Г}\Sigma} \end{cases} \quad (16)$$

– для електричного гальмування:

$$B = \begin{cases} F_{\text{зч}\Sigma}, & \text{якщо } F_{\text{зч}\Sigma} < F_{\text{дв}\Sigma} \\ F_{\text{дв}\Sigma}, & \text{якщо } F_{\text{зч}\Sigma} > F_{\text{дв}\Sigma} \end{cases} \quad (17)$$

– для електропоїзда

$$B_i = \min(B_{\text{Г},i}, F_{\text{зч},i}) \quad (18)$$

Подібно до тягового режиму, розрахункова модель механічної частини для режиму гальмування також може бути деталізована по-різному:

- **Трьомасова модель** є доцільною при проектуванні мікропроцесорних протилежних систем (ABS/WSP), дослідженні асиметричного спрацювання гальм (наприклад, через різний знос колодок на лівому та правому колесах) та аналізі процесів скручування колісної осі під дією потужних фрикційних сил.

- **Двомасова модель** використовується для оцінки динамічних ударних навантажень у тяговому редукторі, що виникають під час різкого переходу з режиму тяги в режим електричного гальмування, а також при інтенсивному зриві колісної пари в юз.

- **Одномасова модель** є цілком достатньою та найбільш раціональною для розрахунку гальмівних шляхів, оцінки загальних обсягів рекуперованої енергії (що є

РЕЙКОВИЙ РУХОМИЙ СКЛАД

критичним для сучасного РС з накопичувачами енергії або системами рекуперації в мережу [19]) та дослідження поздовжньої макродинаміки поїзда.

Оскільки в даному дослідженні пріоритетом є оцінка загальних енергетичних показників та динаміки поїзда як єдиного цілого, одномасова розрахункова модель (9), розроблена для тяги, буде абсолютно коректною і для імітації гальмування за умови заміни тягового моменту на відповідний гальмівний.

$$\begin{cases} J_{пр,ij} \frac{d\omega_{кп,ij}}{dt} = -M_{ГКП,ij} - M_{окп,ij} \\ M_{окп,ij} = \begin{cases} -M_{ГКП,ij}, \text{ якщо } V_{ГКП,ij} < F_{зчкп,ij} \\ -M_{зчкп,ij}, \text{ якщо } V_{ГКП,ij} > F_{зчкп,ij} \end{cases} \end{cases} \quad (19)$$

де $M_{ГКП,ij}$ – гальмівний момент колеса, який можна отримати з урахуванням передавального числа тягового редуктора $\mu_{тр}$ та діаметра колеса R_k .

Спираючись на математичний апарат (19), було синтезовано структурну схему роботи механічної підсистеми у гальмівному режимі, яка проілюстрована на рисунку 10.

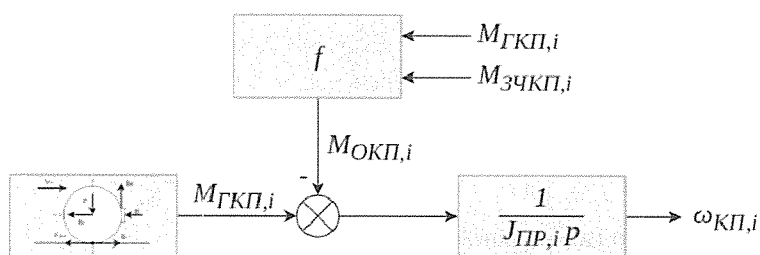


Рис. 10. Структурна схема роботи механічної частини осів режимів гальмування

Аналогічно до режиму тяги, загальна гальмівна сила поїзда B з розподіленою гальмівною системою (як електродинамічною, так і пневматичною) формується шляхом суперпозиції гальмівних зусиль усіх активних осей. Це дозволяє моделювати складні алгоритми WSP (Wheel Slide Protection – протиюзний захист), де гальмівний тиск або рекуперативний момент скидається індивідуально на осі, що заблокувалися:

$$B_{\Sigma} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k B_{ij} \quad (20)$$

Комплексне математичне моделювання руху поїзда

Запропонована система рівнянь (9) дають змогу глибоко формалізувати фізичні явища в ТЕП та зоні контакту коліс із рейками. Це відкриває можливість для комплексного аналізу динаміки всього поїзда в цілому з урахуванням усіх робочих режимів.

Окрім тягових F_t та гальмівних B зусиль, рівняння (1) містить силу опору W , яка може набувати як додатних, так і від’ємних значень. На її величину впливає уза-

гальнений коефіцієнт k_w , який інтегрує в собі аеродинаміку, тип вагонів, криві ділянки колії, ухили профілю та погодні фактори [18]. Через велику варіативність цих показників створити єдину універсальну математичну модель опору для всіх типів екіпажів майже неможливо. Тому для забезпечення високої адекватності моделі при збереженні оптимального часу обчислень, значення k_w слід адаптувати під конкретний тип локомотива і специфіку вибраного перегону. Наприклад, для високошвидкісних поїздів домінуючою складовою у силі W буде аеродинамічний опір, тоді як для важкого вантажного руху визначальними стануть загальна маса та опір від ухилів профілю. Наша математична модель дозволяє легко змінювати ці макропараметри без перебудови самої базової структури диференціальних рівнянь.

Шляхом інтеграції моделей тяги та гальмування у базове диференціальне рівняння поступального руху, формується повна математична модель поїзда, здатна достовірно відтворювати нестационарні процеси.

Для комплексного опису багатодвигунного РС (зокрема МВРС) найбільш доцільно застосувати трирівневу архітектуру математичної моделі. Такий підхід дозволяє чітко розмежувати процеси мікродинаміки в контакті та макродинаміки руху:

1. Рівень осі (мікродинаміка). На цьому рівні розраховується баланс моментів для кожного індивідуального ТЕР (або гальмівного механізму) з урахуванням локального зчеплення та можливого проковзування:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{кп,ij} = V_{п} + v_{пр,ij} \\ F_{зчкп,ij} = m_{о,ij} g \varphi_{зч,ij}(v_{пр,ij}) \\ M_{зчкп,ij} = F_{зчкп,ij} \frac{R_{к,ij}}{\mu_{тр,ij} \eta_{тр,ij}} \\ F_{ркп,ij} = \frac{\mu_{тр,ij} M_{дв,ij} \eta_{тр,ij}}{R_{к,ij}} \\ B_{гкп,ij} = 1000 \varphi_k(V_{кп,ij}) K_{к,ij} \\ M_{гкп,ij} = B_{гкп,ij} \frac{R_{к,ij}}{\mu_{тр,ij} \eta_{тр,ij}} \\ -M_{гкп,ij} \pm M_{дв,ij} - M_{окп,ij} = J_{пр,ij} \frac{d\omega_{пк,ij}}{dt} \\ v_{пр,ij} = \omega_{пк,ij} \frac{R_{к,ij}}{\mu_{тр,ij}} \\ F_{т,ij} = \min(F_{ркп,ij}, F_{зчкп,ij}) \\ B_{ij} = \min(B_{гкп,ij} + F_{дв,ij}, F_{зчкп,ij}) \end{array} \right. \quad (21)$$

Значення $M_{окп,ij}$ визначається за системою рівнянь (10) за умови, що момент двигуна є ненульовим, а також за системою рівнянь (19) у випадку, коли гальмівний момент колісної пари відмінний від нуля.

2. Рівень секції або візка (сумація). Локальні зусилля від окремих осей інтегруються для визначення загального тягового $F_{т,i}$ або гальмівного зусилля, яке генерує конкретна секція чи моторний візок i :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{т,i} = \sum_{j=1}^k F_{т,ij} \\ B_i = \sum_{j=1}^k B_{ij} \\ W = f(V_{п}, k_w) \end{array} \right. \quad (22)$$

РЕЙКОВИЙ РУХОМИЙ СКЛАД

3. Рівень поїзда (макродинаміка). Визначається загальне прискорення та траєкторія руху поїзда як єдиної макросистеми під дією сумарних тягових, гальмівних сил та сили опору руху:

$$\begin{cases} F_{T\Sigma} = \sum_{i=1}^N F_{T,i} \\ B_{\Sigma} = \sum_{i=1}^N B_i \\ W_{\Sigma} = f(V_{п}, k_W) \\ F_{T\Sigma} - B_{\Sigma} - W_{\Sigma} = m_{п} \frac{dV_{п}}{dt} \end{cases} \quad (23)$$

З використанням розробленої комплексної системи рівнянь (21, 22, 23) було побудовано фінальну структурну схему моделі роботи механічної частини локомотива під час його руху ділянкою, що наведена на рисунку 11.

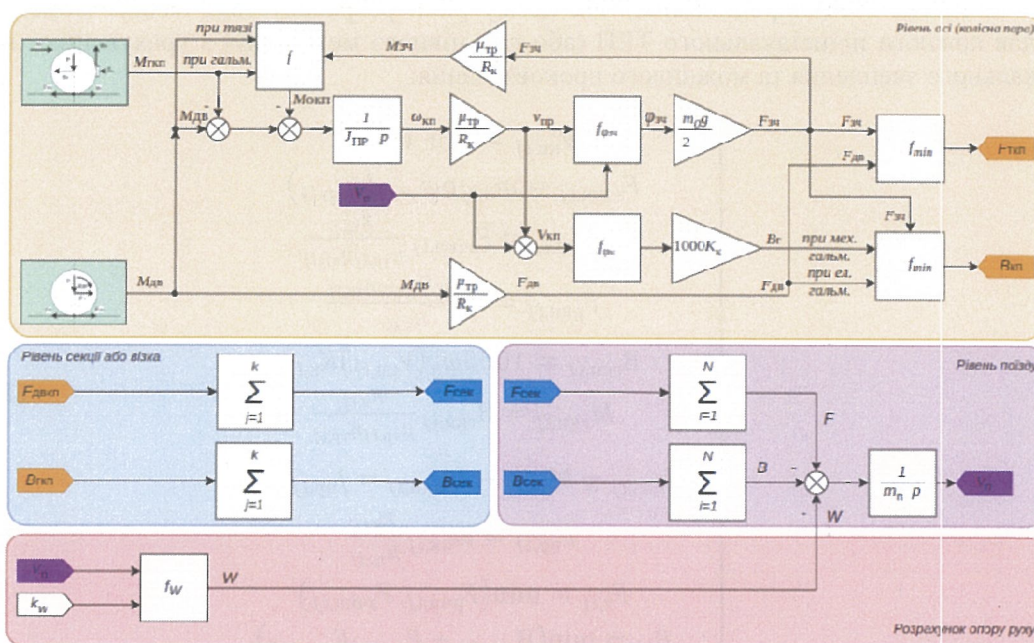


Рис. 11. Структурна схема роботи механічної частини локомотива при його русі

Запропонований ієрархічний підхід до моделювання механічної частини багатодвигунного ТРС забезпечує необхідний компроміс між обчислювальною складністю та фізичною достовірністю результатів. Завдяки декомпозиції системи на рівні окремих осей та подальшій агрегації зусиль на макрорівні, модель стає ефективним інструментом для оцінки переваг розподіленої тяги в сучасних електропоїздах та багатосекційних локомотивах. Це створює надійне методичне підґрунтя для цифрового моделювання «життєвого циклу» тягових процесів, що є критично важливим

РЕЙКОВИЙ РУХОМИЙ СКЛАД

для оптимізації графіків руху та розробки інтелектуальних алгоритмів енергозбереження в системах автоводіння.

Висновки.

У роботі вирішено актуальну науково-прикладну проблему підвищення точності математичного моделювання макродинаміки тягового рухомого складу шляхом розробки узагальненої моделі, що інтегрує процеси в ТЕП та зоні нестационарного фрикційного контакту. За результатами дослідження сформульовано такі висновки:

1. Обґрунтовано необхідність комплексного підходу до моделювання макродинаміки поїзда, який, на відміну від класичних методів, базується на врахуванні взаємозв'язку між швидкістю руху та швидкістю проковзування колісних пар. Це дозволило відійти від спрощених емпіричних залежностей коефіцієнта зчеплення і перейти до динамічного опису переходів між станами «зчеплення–ковзання» (боксування, юз) у єдиному розрахунковому контурі.

2. Розроблено трирівневу ієрархічну архітектуру моделювання (вісь – секція – поїзд), яка забезпечує високу достовірність відтворення тягових і гальмівних характеристик для різних типів РС. Наукова новизна полягає у представленні коефіцієнта тертя у вигляді 3D-поверхні, що залежить одночасно від лінійної швидкості та швидкості ковзання, що дозволяє адекватно імітувати роботу сучасних мікропроцесорних систем керування тягою та протизюзним захистом (WSP).

3. Доведено доцільність застосування оптимізованої одномасової розрахункової схеми механічної частини ТЕП для задач макродинаміки. Встановлено, що для розрахунку енергоефективності, гальмівних шляхів та поздовжнього руху поїзда ділянкою така модель забезпечує необхідну точність (з похибкою, що не перевищує припустимі межі для тягових розрахунків) при суттєвому зниженні обчислювальних витрат порівняно з багатомасовими схемами.

4. Формалізовано математичний опис розподіленої тяги для багатодвигунного РС, що дозволяє враховувати технологічну асиметрію (різний знос бандажів, нерівномірне осьове навантаження) та локальні зовнішні збурення на рейках. Це створює надійний інструментарій для проектування інтелектуальних систем керування, спрямованих на максимізацію використання сили зчеплення та зниження питомих витрат енергії.

5. Запропонована модель є універсальною і легко масштабується для моделювання руху як важковагових вантажних поїздів, так і високошвидкісного моторвагонного рухомого складу, що підтверджується можливістю адаптації параметрів аеродинамічного опору та характеристик гальмівного обладнання.

Повідомлення

Стаття підготовлена при виконанні науково-дослідної роботи «Енергетичний менеджмент у plug-in гібридних тягових системах рейкового рухомого складу, обладнаного багатодвигунним тяговим електроприводом» (№ Д/Р 0125U001619), що фінансується МОН України.

ЛІТЕРАТУРА

1. Goolak S., Sapronova S., Tkachenko V., Riabov Ie., Overianova L., Yeritsyan B. Mathematical model of mechanical subsystem of traction electric drive of an electric locomotive. *Збірник наукових праць УкрДУЗТ*. 2021. Вип. 197. С. 119–129. DOI: <https://doi.org/10.33216/2222-3428-2021-21-12>
2. Ноженко В. С. Поліпшення триботехнічних характеристик двоточкового контакту «колесо-рейка» активацією поверхонь : дис. канд. техн. наук : 05.22.07. Северодонецьк, 2016. 152 с.

3. Барибін М. А., Фалендиш А. П., Клецька О. В., Іванченко Д. А., Кіріцева О. В. Удосконалення тягових розрахунків та режимів ведення тягового рухомого складу. *Наука та прогрес транспорту*. 2021. Вип. 5 (95). С. 71–83. DOI: <https://doi.org/10.15802/stp2021/253550>
4. Болжеларський Я. В., Довганюк С. С. Гальмування маневрового состава при низьких значеннях коефіцієнта зчеплення коліс з рейками. *Залізничний транспорт України*. 2010. № 5. С. 39–43.
5. Бобирь Д. В., Капіца М. І., Сердюк В. Н. Теорія локомотивної тяги. Тягові розрахунки для промислового залізничного транспорту : навч. посіб. Дніпро : УДУНТ, 2022. 113 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://e-book.ust.edu.ua/catalog/view/316/487/3566>
6. Antolin P., Nguyen K., Goicolea J. M. A General and Robust 3D Finite Element Dynamics Framework for Railway Vehicle-Bridge Interaction with Nonlinear Wheel-Rail Contact Modeling. 2026. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2603.06196>
7. Любарський Б. Г., Рябов Є. С., Глебова Т. В., Глебова М. Л. Математична модель тягового приводу на базі двигуна з поперечним полем (переклад р. м.). *Комунальне господарство міст. Серія : Технічні науки та архітектура*. Харків : ХНУМГ, 2008. Вип. 81. С. 283–288. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://repository.kpi.kharkov.ua/items/4caabe1b-4297-49ef-abd2-f6dde543fc16>
8. Goolak S., Liubarskyi B., Riabov I., Chepurna N., Pohosov O. Simulation of a direct torque control system in the presence of winding asymmetry in induction motor. *Engineering Research Express*. 2023. Vol. 5. No. 2. 025070. DOI: <https://doi.org/10.1088/2631-8695/acde46>
9. Goolak S., Liubarskyi B. Vector Control System Taking into Account the Saturation of an Induction Motor. *Tehnički vjesnik*, 2024. Vol. 31. No. 4. P. 1170–1178. DOI: <https://doi.org/10.17559/TV-20221015124239>
10. Тартаковський Е. Д., Агулов А. Ф., Фалендиш А. П. Теорія та конструкція локомотивів. Ч. 2. Вибір та розрахунок основних вузлів локомотивів : навч. посіб. Харків : УкрДАЗТ, 2009. 150 с.
11. Петруковець М. І., Свириденюк А. І. Механіка дискретного фрикційного контакту. (переклад р. м.). Мінськ: Наука і техніка, 1990. 271 с.
12. Riabov I., Overianova L., Iakunin D., Neshcheret V., Ivanov, K. Equipping suburban diesel–electric multiple unit with a hybrid power unit. e-Prime – Advances in Electrical Engineering, *Electronics and Energy*. 2025. Vol. 11. 100949. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.prime.2025.100949>
13. Мямлін С. С. Удосконалення конструкцій рухомого складу вузької колії: дис. канд. техн. наук: 05.22.07. Харків, 2021. 57 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/7314/1/dis_Myamlin.pdf
14. Zhang Y., Zhu W., Wang H., Tian C., Zhou J. Online estimation method of train wheel–rail adhesion coefficient based on parameter estimation. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*. 2025. Vol. 144, no. 3, P. 2873–2891. DOI: <https://doi.org/10.32604/cmescs.2025.068951>
15. Ігнатів Г. С., Сулим А. О., Распопін В. Р., Хозя П. О. Коефіцієнт зчеплення двосистемного електропоїзда міжрегіонального сполучення виробництва ПАТ «КВБЗ» (переклад р. м.). *Збірник наукових праць «Рейковий рухомий склад»*. 2013. Вип. 8. С. 25–33.
16. Рябов Є. С., Овер'янова Л. В., Якунін Д. І. Білоконь І. М., Гулак С. О. Застосування маневрових електровозів для передатної та вивізної роботи. *Збірник наукових праць ДВІТ. Серія: Транспортні системи і технології*. 2022. Вип. 40. С. 47–62. DOI: <https://doi.org/10.32703/2617-9040-2022-40-5>
17. Gan W, Zhao X, Wei D, Bai Z, Ding R, Liu K, Li X. Research on the Identification of Nonlinear Wheel–Rail Adhesion Characteristics Model Parameters in Electric Traction System Based on the Improved TLBO Algorithm. *Electronics*. 2024. Vol. 13. No. 9. 1789. DOI: <https://doi.org/10.3390/electronics13091789>
18. Правила тягових розрахунків для поїзної роботи (переклад р. м.). Москва : Транспорт, 1985. 287 с.
19. Riabov I., Goolak S., Neduzha L. An Estimation of the Energy Savings of a Mainline Diesel Locomotive Equipped with an Energy Storage Device. *Vehicles*. 2024. 6(2), 611–631. DOI: <https://doi.org/10.3390/vehicles6020028>

A. S. Maslij

Ukrainian State University of Railway Transport
Feiirbakha Sq., 7, Kharkiv, 61050, Ukraine
Tel: +380974137970, E-mail: maslij@kart.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0554-8150>

V. A. Gevrasov

Ukrainian State University of Railway Transport
Feiirbakha Sq., 7, Kharkiv, 61050, Ukraine
Tel: +380932563660, E-mail: gevrasov_phd@kart.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8910-5172>

R. M. Antonenko

Ukrainian State University of Railway Transport
Feiirbakha Sq., 7, Kharkiv, 61050, Ukraine
Tel: +380632257218, E-mail: antonenko_phd@kart.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-9241-5857>

I. V. Iakubovskiy

Ukrainian State University of Railway Transport
Feiirbakha Sq., 7, Kharkiv, 61050, Ukraine
Tel: +380974460052, E-mail: lili@i.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-7833-6604>

**MATHEMATICAL MODELING OF MACRODYNAMICS OF RAIL
ROLLING STOCK WITH MULTI-MOTOR TRACTION
ELECTRIC DRIVE**

This study presents a generalized mathematical model of train movement to accurately simulate non-stationary processes within the traction electric drive and the wheel-rail frictional contact zone during traction and braking.

The model employs an integrated three-level architecture: single-axle microdynamics, bogie-level force summation, and overall train macrodynamics. Furthermore, the paper justifies the feasibility of using an optimized single-mass computational scheme for the mechanical part of the traction electric drive, which is particularly effective for evaluating energy efficiency, calculating braking distances, and simulating general train movement along a track section.

A novel system of differential equations integrates traction, braking, and motion resistance. Crucially, frictional interaction is refined by defining the adhesion coefficient as a 3D nonlinear function of both linear velocity and wheelset slip. This allows for precise reproduction of adhesion loss (spin and slide) and friction transitions.

The framework's scalability ensures adaptability across various train types, providing a robust foundation for optimizing microprocessor-based traction and anti-skid control systems.

Keywords: *mathematical modeling, multi-motortraction rolling stock, traction electric drive, wheel-railcontact, adhesion coefficient, slipvelocity.*

REFERENCES

1. Goolak, S., Sapronova, S., Tkachenko, V., Riabov, Ie., Overianova, L., & Yeritsyan, B. (2021). Mathematical model of mechanical subsystem of traction electric drive of an electric locomotive. *Zbirnyk naukovykh prats UkrDUZT*, (197), 119–129. DOI: <https://doi.org/10.33216/2222-3428-2021-21-12>

2. Nozhenko, V. S. (2016). *Polipshennia trybotekhnichnykh kharakterystyk dvotochkovoho kontaktu «koleso-reika» aktyvatsiieiu poverkhon* (Candidate dissertation). Sievierodonetsk.
3. Barybin, M. A., Falendysh, A. P., Kletska, O. V., Ivanchenko, D. A., & Kiritseva, O. V. (2021). Udoshonalennia tiahovykh rozrakhunkiv ta rezhymiv vedenniatia hovoho rukhomoho skladu. [Improvement of Traction Calculations and Driving Modes of Traction Rolling Stock]. *Nauka ta prohres transportu – Science and Transport Progress*, (5), 71–83. DOI: <https://doi.org/10.15802/stp2021/253550>
4. Bolzhelarskyi, Ya. V., & Dovhaniuk, S. S. (2010). Halmuvannia manevrovoho sostava pry nyzkykh znachenniakh koeffitsiienta zcheplennia kolis z reikamy. [Braking of shunting trains at lower values of wheel-rail adhesion coefficient]. *Zaliznychnyi transport Ukrainy – Railway transport of Ukraine*, 5, 39–43.
5. Bobyr, D. V., Kapitsa, M. I., & Serdiuk, V. N. (2022). Teoriia lokomotyvnoi tiahly. Tiahovi rozrakhunky dlia promyslovoho zaliznychnoho transportu [Theory of locomotive traction. Traction calculations for industrial railway transport]. *UDUNT*, 113. Retrieved from: <https://e-book.ust.edu.ua/catalog/view/316/487/3566>
6. Antolin, P., Nguyen, K., & Goicolea, J. M. (2026). A General and Robust 3D Finite Element Dynamics Framework for Railway Vehicle-Bridge Interaction with Nonlinear Wheel-Rail Contact Modeling *arXiv*. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2603.06196>
7. Lyubarskiy, B. G., Riabov, E. S., Hlebova, T. V., & Hlebova, M. L. (2008). Matematicheskaya model tyagovogo privoda na bazi dviguna z poperechnim polem. [Mathematical model of a traction drive based on a transverse field motor] *Komunalne hospodarstvo mist – Municipal economy of the city*, 81, 283–288. Retrieved from: <https://repository.kpi.kharkov.ua/items/4caabelb-4297-49ef-abd2-f6dde543fc16>
8. Goolak, S., Liubarskiy, B., Riabov, I., Chepurna, N., & Pohosov, O. (2023). Simulation of a direct torque control system in the presence of winding asymmetry in induction motor. *Engineering Research Express*, 5, 025070. DOI: <https://doi.org/10.1088/2631-8695/acde46>
9. Goolak, S., & Liubarskiy, B. (2024). Vector Control System Taking into Account the Saturation of an Induction Motor. *Tekhnichi vjesnik*, 31 (4), 1170–1178. DOI: <https://doi.org/10.17559/TV-20221015124239>
10. Tartakovskiy, E. D., Ahulov, A. F., & Falendysh, A. P. (2009). Teoriia ta konstruktsiia lokomotyviv. Vybir ta rozrakhunok osnovnykh vuzliv lokomotyviv. [Theory and design of locomotives. Selection and calculation of the main nodes of locomotives]. UkrDAZT. 151.
11. Petrukovets, M. I., & Sviridenyuk, A. I. (1990). Mekhanika diskretnogo friktsionnogo kontakta. [Mechanics of discrete friction contact]. *Nauka i tekhnika*. 271.
12. Riabov, I., Overianova, L., Iakunin, D., Neshcheret, V., & Ivanov, K. (2025). Equipping suburban diesel–electric multiple unit with a hybrid power unit *e-Prime*, 11, 100949. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.prime.2025.100949>
13. Miamlin, S. S. (2021). *Udoshonalennia konstruktсии rukhomoho skladu vuzkoi kolii* (Candidate dissertation). Kharkiv. Retrieved from: http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/7314/1/dis_Myamin.pdf
14. Zhang, Y., Zhu, W., Wang, H., Tian, C., & Zhou, J. (2025). Online Estimation Method of Train Wheel-Rail Adhesion Coefficient Based on Parameter Estimation. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 144 (3), 2873–2891. DOI: <https://doi.org/10.32604/cmescs.2025.068951>
15. Ihnatov, H. S., Sulym, A. O., Raspopin, V. R., & Khozia, P. O. (2013). Koeffitsiient zcheplennia dvosystemnoho elektropoizda mizhrehionalnoho spoluchennia vyrobnytstva PAT «KVBZ». [Coupling coefficient of a dual-system electric train for interregional connections manufactured by PJSC «KVBZ»]. *Zbirnyk naukovykh prats «Reikovy rukhomiy sklad» – Collection of scientific papers 'Railbound Rolling Stock'*, 8, 25–33.
16. Riabov, Ye. S., Overianova, L. V., Yakunin, D. I., Bilokon I. M., & Hulak S. O. (2022). Zastosuvannia manevrovvykh elektrovoziv dlia peredatnoi ta vyviznoi roboty [Application of maneuvering electric locomotives for transfer and freight work]. *Transportni systemy i tekhnologii – Transport systems and technologies*, 40, 47–62. DOI: <https://doi.org/10.32703/2617-9040-2022-40-5>
17. Gan W, Zhao X, Wei D, Bai Z, Ding R, Liu K, Li X. (2024). Research on the Identification of Nonlinear Wheel–Rail Adhesion Characteristics Model Parameters in Electric Traction System Based on the Improved TLBO Algorithm. *Electronics*, 13 (9), 1789. DOI: <https://doi.org/10.3390/electronics13091789>
18. Pravila tyagovykh raschetov dlya poezdnoy raboty. [Rules for traction calculations for train operation]. (1985). Transport. 287.
19. Riabov, I., Goolak, S., & Neduzha, L. (2024). An Estimation of the Energy Savings of a Mainline Diesel Locomotive Equipped with an Energy Storage Device. *Vehicles*, 6 (2), 611–631. DOI: <https://doi.org/10.3390/vehicles6020028>



Стаття надійшла 08.04.2026
Стаття прийнята 16.04.2026
Опубліковано 29.05.2026