

УДК 629.4.015:625.03

В.И. Ткачев, Ю. Я. Водяников, Д. А. Шамшей, В.С. Речкалов

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОЦЕНКИ ДИНАМИЧЕСКОЙ
НАГРУЖЕННОСТИ ПАССАЖИРСКОГО ВАГОНА ПРИ СЛУЧАЙНЫХ
ВОЗМУЩЕНИЯХ СО СТОРОНЫ РЕЛЬСОВОГО ПУТИ НА
КОЛЕСНЫЕ ПАРЫ ТЕЛЕЖЕК**

Пассажирские вагоны нового поколения имеют ряд существенных отличий, к основным из которых следует отнести увеличенную базу вагона и осевую нагрузку, кроме того в рессорном подвешивании используются новые элементы - пневматические рессоры, а также дисковые тормоза. Такие вагоны могут эксплуатироваться со скоростями более 200 км/ч. Очевидно для таких вагонов требуется тщательный динамико-прочностной анализ нагруженности кузова и элементов ходовых частей вагона. Поэтому целью статьи является разработка математической модели пассажирского вагона, учитывающей основные конструктивные особенности вагона при случайных колебаниях. Для решения поставленной задачи использовались основополагающие принципы динамики деформируемых систем, теории прочности и случайных процессов. Математическая модель получена на основе расчетной схемы, в которой кузов вагона рассматривается в виде пространственной конечно-элементной модели, ходовые части (тележки) – как упругие балки, учитываются упруго-диссипативные свойства рельсового пути, в качестве возмущений – случайные неровности рельсового пути. Предложена математическая модель пассажирского вагона, которая учитывает кузов как пространственную конструкцию, упругие свойства ходовых частей и случайные неровности рельсового пути при динамических колебаниях. Практическая значимость состоит в оценке динамической нагруженности конструкции пассажирского вагона, а также прочности кузова в заданном диапазоне скоростей движения при случайных возмущениях со стороны рельсового пути на колесные пары.

В процессе эксплуатации кузова пассажирских вагонов подвергаются весьма интенсивным и сложным воздействиям, которые могут привести к появлению трещин в отдельных элементах. Основной причиной этих разрушений являются интенсивные изгибные колебания кузова. Использование традиционного подхода, сводящегося к введению динамических коэффициентов, в ряде случаев не дает возможности учесть специфику поведения надрессорного строения при различных условиях нагружения.

Поэтому создание пассажирских вагонов нового поколения, предназначенных для скоростей движения более 200 км/ч, в одну из основных выдвигает задачи обеспечения прочности и надежности конструкции. Очевидно, при проектировании таких конструкций необходим предварительный тщательный динамико-прочностной анализ, что требует проведения более детальных теоретических исследований.

© *В.И. Ткачев, Ю. Я. Водяников, Д. А. Шамшей, В.С. Речкалов, 2014*

РЕЙКОВИЙ РУХОМИЙ СКЛАД

следований, создание более полных расчетных схем, учитывающих различные особенности конструкции, разработки углубленных математических моделей, находящихся в условиях динамического стохастического воздействия и требующих методов статистической динамики.

Пассажирские вагоны нового поколения имеют ряд существенных отличительных признаков, к основным из которых следует отнести наличие дисковых тормозов и системы пневмоподвешивания, кроме того эти вагоны имеют увеличенную длину по осям сцепления автосцепок.

Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что динамика и прочность пассажирских вагонов, кузова которых представляют собой достаточно гибкие тонкостенные конструкции, во многом отлична от вагонов других типов.

В процессе эксплуатации пассажирский вагон (далее вагон) совершает пространственные колебания под воздействием случайных нагрузок со стороны рельсового пути на колесные пары. Вместе с тем, как показали экспериментальные исследования, система пневмоподвешивания кузова обладает свойством уменьшения амплитуд поперечных колебаний, поэтому для оценки динамической нагруженности элементов вагона достаточно рассмотреть вертикальные колебания.

При исследовании колебаний кузова принимаются следующие допущения относительно физических свойств изучаемой конструкции:

- жесткость кузова при ограниченной величине деформаций остается постоянной;
- демпфирование колебаний кузова слабое;
- параметры системы не изменяются с течением времени.

Для построения математической модели и учета основных конструктивных особенностей, кузов вагона представляется в виде пространственной конечно-элементной модели (рис. 1), в качестве обобщенных координат принимаются перемещения в узловых точках (w_i).

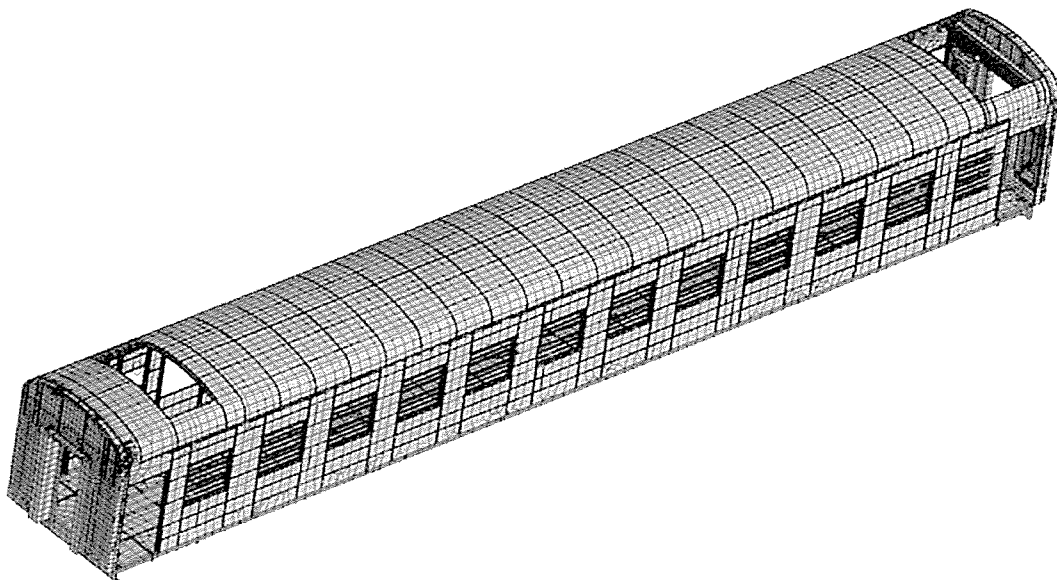


Рис. 1. Конечно-элементная модель кузова

РЕЙКОВИЙ РУХОМИЙ СКЛАД

Расчетная схема пассажирского вагона (рис. 2) рассматривается в виде составной механической системы, состоящей из основной подсистемы (кузов пассажирского вагона), подсистемы второго яруса (тележки) и ряда элементов (упруго-диссипативный путь), через которые на подсистемы второго яруса передаются кинематические случайные возмущения (неровности пути).

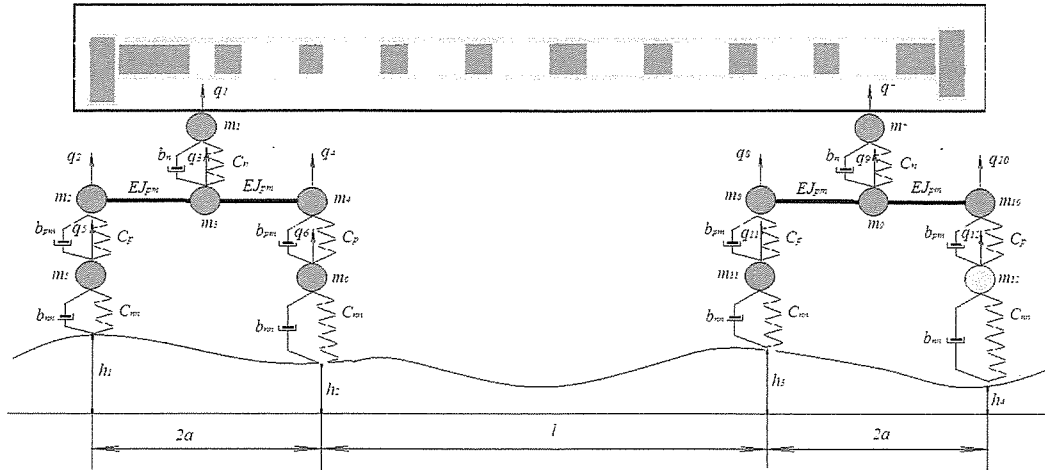


Рис. 2. Расчетная схема вагона

(где C_p - жесткость рессорных комплектов тележек; C_n - жесткость рессорных комплектов пневмоподвешивания; C_m - жесткость рельсового пути; q_i - обобщенные координаты сосредоточенных масс; η_i - неровности рельсового пути; $2a$ - база тележки; b_n - коэффициент демпфирования рессорных комплектов пневмоподвешивания; b_{pm} - коэффициент демпфирования рессорных комплектов тележек; b_m - коэффициент демпфирования рельсового пути; EJ_{pm} - жесткость рамы тележки; m_i - массы тележек, сосредоточенные в узлах)

За обобщенные координаты принимаются узловые перемещения кузова и вертикальные перемещения сосредоточенных масс тележек.

Жесткость торцевой стенки кузова вагона в поперечной, относительно продольной оси, плоскости намного превышает жесткость остальной части кузова, что позволяет ввести краевые условия на торцах, запрещающие их перемещения в плоскости стенки. Неоднородность физических моделей, которыми представлена динамическая система, обуславливает неравенство перемещений соприкасающихся узлов кузова и тележек. Это объясняется введенными краевыми условиями, запрещающими перемещения торцевой стенки в поперечной плоскости, и, следовательно, такая расчетная схема позволяет определять перемещения точек кузова, которые обусловлены деформацией оболочки. С другой стороны кузов как элемент транспортного средства опирается на ходовые части, а, значит, его перемещения должны содержать составляющие, обусловленные деформацией подсистемы нижних ярусов. С целью устранения этого противоречия динамическая система разбивается на самостоятельные подсистемы, а их взаимодействие заменяется внутренними неизвестными силами (рис. 3)

РЕЙКОВИЙ РУХОМИЙ СКЛАД

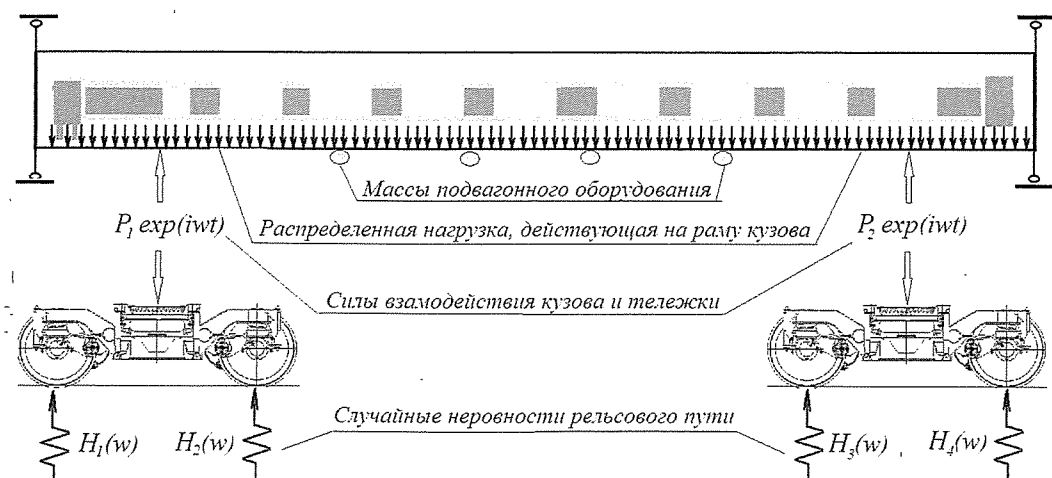


Рис. 3. Силы, действующие на элементы пассажирского вагона

Дифференциальные уравнения колебаний вагона могут быть получены с использованием уравнений Лагранжа второго рода [1]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i, \quad (1)$$

где T , Π , Φ - кинетическая, потенциальная энергии и функция рассеяния системы;

q_i , Q_i - компоненты векторов обобщенных координат и обобщенных сил, не обладающих потенциалом.

Кинетическая и потенциальная энергии динамической системы определяются как суммы кинетических и потенциальных энергий конструктивных элементов вагона.

При выводе дифференциальных уравнений, описывающих вертикальные колебания вагона, принимаются следующие допущения:

- элементы рессорного подвешивания невесомы;
- жесткости элементов подвешивания пропорциональны статическим нагрузкам на них;
- колесные пары движутся по упругому пути с постоянной скоростью;
- боковые колебания функционально не связаны с вертикальными;
- рассматривается движение на прямом участке пути без силы тяги;
- давление и объем воздуха в пневморессоре при колебаниях подчиняется адиабатическому закону при условии отсутствия теплообмена с внешней средой:

$$P \cdot V^\gamma = const, \quad (2)$$

где γ - показатель адиабаты.

Кинетическая и потенциальная энергии динамической системы представляется в виде квадратичных форм соответственно скоростей и перемещений узловых точек:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}(t)\}^T \cdot [M] \cdot \{\dot{q}(t)\}, \quad (3)$$

$$U = \frac{1}{2} \{q(t)\}^T \cdot [K] \cdot \{q(t)\}, \quad (4)$$

$\{q(t)\}, \{\dot{q}(t)\}$ - векторы узловых перемещений и скоростей;
 $[M]$ - матрица масс;
 $[K]$ - матрица жесткости.

В соответствии с конечно-элементным представлением, матрица жесткости для тележки имеет размерность шестого порядка. Матрица масс при этом приобретает диагональную структуру, причем ненулевые элементы матрицы стоят только в строках, соответствующих поступательным перемещениям. Это обуславливает три динамические степени свободы, связанные с изменением координат q_p , координаты же φ_i (углы поворота) являются безмассовыми.

Для записи уравнений движения в обычной форме, исключая из общей матрицы жесткости координаты φ_p , получим:

$$[K]_{\hat{A}E} = \frac{3 \cdot E \cdot J_{\delta\delta}}{2 \cdot a^3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}, \quad (5)$$

$$[\hat{I}]_{\hat{A}E} = \begin{vmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_4 \end{vmatrix}, \quad (6)$$

где $2a$ - база тележки;

J_{pm} - эквивалентные моменты инерции поперечного сечения соответственно соединительной балки и тележки.

Потенциальная энергия, обусловленная деформациями рессорных комплектов тележки и упругостью рельсового пути, определится выражением:

$$U_{pm} = \frac{1}{2} C_n (q_1 - q_3)^2 + \frac{1}{2} C_p (q_2 - q_5)^2 + \frac{1}{2} C_p (q_4 - q_6)^2 + \frac{1}{2} C_m (q_5 - h_1)^2 + \frac{1}{2} C_m (q_6 - h_2)^2 + \frac{1}{2} C_n (q_7 - q_9)^2 + \frac{1}{2} C_p (q_8 - q_{11})^2 + \frac{1}{2} C_p (q_{10} - q_{12})^2 + \frac{1}{2} C_m (q_{11} - h_3)^2 + \frac{1}{2} C_m (q_{12} - h_4)^2, \quad (7)$$

где C_p - жесткость рессорных комплектов тележек;

C_n - жесткость рессорного пневмоподвешивания;

C_m - жесткость рельсового пути;

q_i - обобщенные координаты;

h_i - неровности рельсового пути.

Потенциальная и кинетическая энергии динамической системы определится как сумма потенциальных и кинетических энергий, составляющих систему элементов:

$$U = \frac{1}{2} \{W\}^T \times [r] \times \{W\} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \{q\}_{Tj}^T \times [K]_j^{\#E} \times \{q\}_{Tj} + U_{\text{оп}}, \quad (8)$$

РЕЙКОВИЙ РУХОМИЙ СКЛАД

$$T = \frac{1}{2} \{W\}^T \times [t] \times \{W\} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \{q\}_{TJ}^T \times [M]_{IJ} \times \{q\}_{TJ}, \quad (9)$$

где m - количество тележек;

$\{W\}$ - вектор узловых перемещений конечных элементов кузова;

$[r]$ - матрица жесткости конечных элементов кузова;

$[t]$ - матрица масс конечных элементов кузова.

Функция рассеивания определяется по формуле:

$$\Phi = \frac{1}{2} \beta_n (\dot{q}_1 - \dot{q}_3)^2 + \frac{1}{2} \beta_{pm} (\dot{q}_2 - \dot{q}_5)^2 + \frac{1}{2} \beta_{pm} (\dot{q}_4 - \dot{q}_6)^2 + \frac{1}{2} \beta_{mm} (\dot{q}_5 - \dot{h}_1)^2 + \frac{1}{2} \beta_{mm} (\dot{q}_6 - \dot{h}_2)^2 + \\ \frac{1}{2} \beta_n (\dot{q}_7 - \dot{q}_9)^2 + \frac{1}{2} \beta_{pm} (\dot{q}_8 - \dot{q}_{11})^2 + \frac{1}{2} \beta_{pm} (\dot{q}_{10} - \dot{q}_{12})^2 + \frac{1}{2} \beta_{mm} (\dot{q}_{11} - \dot{h}_3)^2 + \frac{1}{2} \beta_{mm} (\dot{q}_{12} - \dot{h}_4)^2 \quad (10)$$

Вводя силы P_1 и P_2 , отображающие взаимодействие кузова с тележками, получим следующую систему дифференциальных уравнений, которую представим в матричном виде:

$$\begin{aligned} |t| \cdot \{\ddot{W}(t)\} + |r| \cdot \{W(t)\} &= \{P_1(t), P_2(t)\}; \\ |M|_I \cdot \{\ddot{q}(t)\}_I + |B|_I \cdot \{\dot{q}(t)\}_I + |K|_I \cdot \{q(t)\}_I &= \{Q(t)\}_I; \\ |M|_{II} \cdot \{\ddot{q}(t)\}_{II} + |B|_{II} \cdot \{\dot{q}(t)\}_{II} + |K|_{II} \cdot \{q(t)\}_{II} &= \{Q(t)\}_{II} \end{aligned} \quad (11)$$

при симметричной конструкции вагона относительно продольной и поперечной плоскостях симметрии выполняются следующие равенства:

$$|M|_I = |M|_{II} = |M|, \quad (12)$$

$$|K|_I = |K|_{II} = |K|, \quad (13)$$

где $|t|$, $|r|$ - матрицы соответственно инерционных и жесткостных коэффициентов для конечно-элементной модели кузова;

W , \dot{W} - перемещения узлов конечных элементов и их вторые производные конечно-элементной модели кузова;

$\{P_1(t), P_2(t)\}$ - вектор возмущений передаваемый на кузов со стороны тележек;

$|M|_{III}$ - матрица масс конечно-элементного представления подсистемы второго яруса:

$$|M|_I = |M|_{II} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_6 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$|B|_{III}$ - матрица демпфирования рессорного подвешивания тележек и рельсового пути;

РЕЙКОВИЙ РУХОМИЙ СКЛАД

$$|B|_I = |B|_{II} = \begin{vmatrix} b_{\gamma} & 0 & -b_{\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{\delta\delta} & 0 & 0 & -b_{\delta\delta} & 0 \\ 0 & 0 & b_{\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{\delta\delta} & 0 & -b_{\delta\delta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{\gamma\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{\gamma\gamma} \end{vmatrix}, \quad (15)$$

$\{q(t)\}_{I(II)}$ - вектор обобщених координат,

$$\{q(t)\}_I^T = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}, \quad (16)$$

$$\{q(t)\}_{II} = \{q_7, q_8, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}\}, \quad (17)$$

$|K|_{I(II)}$ - матрица жёсткості,

$$[K]_I = [K]_{II} = \begin{vmatrix} C_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{1,1}^T + C_{pm} & k_{1,2}^T & k_{1,2}^T & 0 & 0 \\ 0 & k_{2,1}^T & k_{2,2}^T + C_{pm} & k_{2,3}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{3,1}^T & k_{3,2}^T & k_{3,3}^T + C_{pm} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_p \end{vmatrix}, \quad (18)$$

$\{Q(t)\}_{I(II)}$ - векторы возмущающих воздействий на подсистемы;

$$\{Q(t)\}_I = \begin{vmatrix} P_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_n \cdot h_1 + h_{II} \cdot \dot{h}_1 \\ C_n \cdot h_2 + h_{II} \cdot \dot{h}_2 \end{vmatrix}, \quad (19)$$

$$\{Q(t)\}_{II} = \begin{vmatrix} P_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_n \cdot h_3 + h_{II} \cdot \dot{h}_3 \\ C_n \cdot h_4 + h_{II} \cdot \dot{h}_4 \end{vmatrix}, \quad (20)$$

Вводя оператор дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$, сведем систему дифференциальных уравнений к стандартной векторно-матричной форме:

РЕЙКОВИЙ РУХОМИЙ СКЛАД

$$[D(p)] \times \{q(t)\} = [Q(p)] \times \{h(t)\}, \quad (21)$$

где $[D(p)]$ - функциональная полиномиальная матрица размера $(\kappa \times \kappa)$, элементами которой являются функциональные многочлены от p :

$$d_{ij}(p) = m_{ij} p^2 + \beta_{ij} p + C_{ij}, \quad (22)$$

здесь $m_{ij}, \beta_{ij}, C_{ij}$ - инерционные, диссипативные и жесткостные параметры;
 $\{q(t)\}$ - вектор обобщенных координат;

$[Q(p)]$ - функциональная полиномиальная матрица размера $K \times l$ (l число входов), элементами которой являются функциональные многочлены от p :

$$Q_{ij}(p) = \beta_{ij}^n p + C_{ij}^n, \quad (23)$$

здесь β_{ij}^n, C_{ij}^n - диссипативные и жесткостные параметры рельсового пути;
 $\{h(t)\}$ - вектор возмущений.

Основные характеристики исследуемых процессов определяются с использованием матрицы спектральных плотностей выходного процесса $[S]_q$ по формуле [2]:

$$[S]_q = [\Phi(j\omega)] \times [S_f(\omega)] \times [\Phi(j\omega)]^*, \quad (24)$$

где ω - текущая частота;

$[S_f(\omega)]$ - матрица взаимных спектральных плотностей входных процессов, размера $l \times l$;

$[\Phi(j\omega)]$ - матрица эрмитово-сопряженная с матрицей $[\Phi(j\omega)]$ размера $K \times l$ амплитудно-частотных характеристик, каждый элемент которой $\varphi_{q_{jci}}(j\omega)$ есть амплитудно-частотная характеристика q -ой обобщенной координаты ($q = 1, 2, \dots, K$), соответствующая i -му входу ($i = 1, 2, \dots, l$), $j = \sqrt{-1}$.

Матрица амплитудно-частотных характеристик обобщенных координат определяется из решения уравнения (21):

$$[\Phi(j\omega)] = [D(j\omega)]^{-1} \times [Q(j\omega)], \quad (25)$$

которая получается заменой $p = j\omega$ в операторной матрице системы уравнений (21).

Принимая, что случайные входные воздействия, обусловленные железнодорожной колеей, одинаковые с запаздыванием, зависящим от скорости движения и расстояния между колесными парами, элемент матрицы спектральных плотностей входных процессов определится через спектральную плотность первой колесной пары:

$$S_{fjk} = S_{f1} \exp(-j(\tau_i - \tau_k)), \quad (26)$$

тем самым свести задачу к эквивалентной системе с одним входом.

РЕЙКОВИЙ РУХОМИЙ СКЛАД

Выводы

Представленная математическая модель вертикальных колебаний пассажирских вагонов позволяет учитывать:

- конструктивные особенности кузова пассажирского вагона в виде пространственной конечно-элементной модели;
- упругие свойства тележек,
- упруго-диссипативные свойства железнодорожного пути.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лазарян В.А. Динамика вагонов / В.А. Лазарян. – М.: Транспорт, 1964. – 250 с.
2. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее приложение к задачам автоматического управления / В.С. Пугачев. – М.: Физматгиз, 1962. - 883 с.